

Le Calcul Littéral

A la fin du chapitre, je dois savoir :

Développer et réduire une distributivité simple, double, une expression littérale avec ou sans parenthèses

Factoriser des expressions littérales simples jusqu'à plus compliquées comme par ex $A = (2x + 1)(x+2) + (2x + 1)^2$

Calculer la valeur numérique d'une expression littérale en remplaçant la lettre par un nombre

Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général dans une situation problème, valider ou réfuter une conjecture.

I. Réduction.

Définition : **Réduire** c'est écrire une formule avec le moins d'opération possible, en utilisant les notations et en respectant les règles de priorités de calculs.

Conventions et notations : $0a = 0$ $1a = a$ $-1a = -a$ $a \times a = a^2$ $a \times a \times a = a^3$ $\frac{a}{a} = 1$

Ex : Réduire une somme différence :

$$2a + 5a = 7a \quad 3a^2 - 8a^2 = -5a^2 \quad \text{MAIS} \quad 10a + 2 \neq 12 \quad \text{car il y a une multiplication prioritaire } 10 \times a$$

Ex : Réduire un produit, un quotient : $2a \times (-5a) = -10a^2$ $\frac{15a^3}{5a} = 3a^2$ $-3a^2 \times (-7a) = -21a^3$

Suppression de parenthèses : $8a - (-4a + 3) = 8a + 4a - 3 = 12a - 3$

Ex : Réduire $(-6a + 5) - (4a - 2) + (-3a^2 + 7) = -6a + 5 - 4a + 2 - 3a^2 + 7 = -3a^2 - 10a + 12$

II. Développement.

Définition : **Développer** un produit c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique (avec des + et -)

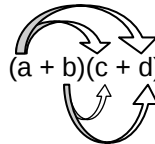
Propriétés : distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
avec a, b, c, d, et k des nombres quelconques.

Distributivité simple :



$$k(a + b) = k \times a + k \times b$$

Distributivité double :



$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Ex : $A = 3(4 - 3a) - 5(-2 + 4a)$
 $= 12 - 9a + 10 - 20a$
 $= -29a + 22$

Ex : $B = (5a - 4)(4 - 3a)$
 $= 20a - 15a^2 - 16 + 12a$
 $= -15a^2 + 32a - 16$

Méthode :

$$A = (5x - 1)(4 - x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on développe} \end{array} \right.$$

$$A = 20x - 5x^2 - 4 + x$$

$$A = -5x^2 + 21x - 4$$

on réduit les termes semblables en premier les x^2 , puis les x puis les nombres seuls

Applications : Développer les 3 identités remarquables

Propriété : Pour a et b deux nombres relatifs quelconques, on a les identités :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{carré d'une somme}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{carré d'une différence}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{produit somme par différence ou différence de 2 carrés}$$

Remarque : $2ab = 2 \times a \times b$ est appelé « le double produit »

Preuve : on développe à partir de

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + a \times (-b) + b \times a - b^2 = a^2 - b^2$$

Exemples : copier la page 36 du manuel

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

→ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(x - 4)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$$

Attention, le double produit n'est pas précédé du même signe que les deux carrés !

$$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

→ On remplace a par x et b par 4 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'expression $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$$

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

→ On remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

→ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'expression $(a + b)(a - b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$$(7x + 2)(7x - 2) = (7x)^2 - 2^2$$

$$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4$$

→ On remplace a par $7x$ et b par 2 dans $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

→ On réduit l'expression obtenue.

Attention : $3a^2 = 3 \times a \times a$ alors que $(3a)^2 = 3a \times 3a = 9a^2$

Donc $3a^2 \neq (3a)^2$

III. Factorisation

Définition :

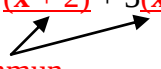
Factoriser une somme algébrique c'est l'écrire sous forme d'un produit.

Propriété utilisée : distributivité simple avec « mise en facteur commun »

Somme / Différence		Produit
$ka + kb$	$= k \times a + k \times b$	$= k(a + b)$
$ka - kb$	$= k \times a - k \times b$	$= k(a - b)$

Ecriture formelle générale : $k \times \Delta - k \times \Diamond + k \times \bigcirc = k \times (\Delta - \Diamond + \bigcirc)$

Méthode : Factoriser $B = (x - 4)(x + 2) + 3(x + 2)$

$B = (x - 4)(x + 2) + 3(x + 2)$  facteur commun $B = (x + 2)[(x - 4) + 3]$ $B = (x + 2)(x - 1)$	1° Repérer le facteur commun 2° mise en facteur et mise de crochet pour visualiser une priorité 3° réduction dans le crochet
--	--

Application : Pierre affirme que la somme de 3 multiples de 4 est encore un multiple de 4. Vrai ou Faux

Un multiple de 4 s'écrit $4x$...

Ecrivons la somme de 3 multiples de 4

$4xa + 4xb + 4xc = 4x(a+b+c) = 4x \dots$ Donc c'est bien un multiple de 4

Exemple 1 : Fais apparaître un facteur commun dans l'expression $A = 3y + 21$ puis factorise.

$A = 3 \times y + 3 \times 7$ $\longrightarrow$ On repère un facteur commun.
 $A = 3(y + 7)$ $\longrightarrow$ On factorise.

Exemple 2 : Factorise l'expression $B = 2x + xy$.

$B = 2 \times x + x \times y$ $\longrightarrow$ On repère un facteur commun.
 $B = x(2 + y)$ $\longrightarrow$ On factorise.

Exemple 3 : Factorise l'expression $C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$.

$C = (2x + 5)(3x + 7) + (2x + 5)(6x + 1)$ $\longrightarrow$ On repère un facteur commun.
 $C = (2x + 5)[(3x + 7) + (6x + 1)]$ $\longrightarrow$ On factorise.
 $C = (2x + 5)(9x + 8)$ $\longrightarrow$ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 4 : Factorise l'expression $D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$ $\longrightarrow$ On repère un facteur commun.
 $D = (9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)]$ $\longrightarrow$ On factorise.
 $D = (9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11]$ $\longrightarrow$ On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».
 $D = (9x - 4)(2x - 5)$ $\longrightarrow$ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

Exemple 5 : Factorise l'expression $E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$.

$E = (5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7)$ $\longrightarrow$ On repère un facteur commun.
 $E = (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)]$ $\longrightarrow$ On factorise.
 $E = (5x - 7)[9x - 2 - 5x + 7]$ $\longrightarrow$ On supprime les parenthèses à l'intérieur des crochets en faisant attention au signe « - ».
 $E = (5x - 7)(4x + 5)$ $\longrightarrow$ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.