Fonctions affines, linéaires

A la fin du chapitre, je dois savoir :
Par cœur les définitions et formules des fonctions affines, linéaires, constantes, la formule de calcul du taux d'accroissement,
Le vocabulaire des graphiques : décalage à l'origine, pente, coefficient directeur
Déterminer la formule d'une fonction affine par le calcul ou par le graphique
Exploiter les fonctions affines dans des problèmes

Rappel : x est l'antécédent.
f (x) est l'image de x par la fonction f

INFO

I. Définitions, vocabulaire.

1) Reconnaître une fonction affine par sa formule :

Ex : Au cinéma, on paye un abonnement mensuel de 20 € puis 3 € chaque place.
si x désigne le nombre de places et f(x) désigne le prix à payer alors on a la formule f(x) =

Certaines situations qui ne sont pas des situations de proportionnalité peuvent se modéliser avec deux opérations :
« je ……………………….. par un nombre a puis ………………………un nombre b »

Définition : Pour a et b sont des nombres donnés, une fonction f définie par $x \mapsto ax + b$
est une *fonction* …………………… de coefficients a et b.

La formule d'une fonction affine est du type $f(x) = a x + b$

2) Cas particulier : la fonction linéaire et la proportionnalité.

Le procédé de calcul « je multiplie le nombre de départ par un nombre a » est la modélisation d'une **situation de proportionnalité,** le nombre a est le coefficient de proportionnalité.

Définition : Une fonction définie par la formule f(x) = ax , est une ***fonction ……………***de coefficient a.

Ex : Voici une grille de tarif pour la livraison à domicile

Distance en km	20	50	75	140	x
Prix à payer en €	5,2	13	19,5	36,4	

Méthode (Rappel) :
Pour savoir si on a une situation de proportionnalité,
On cherche si on a un coefficient multiplicatif entre les deux grandeurs pour chaque colonne du tableau.

Si P désigne le prix à payer et x le nombre de kilomètre : on a alors la formule P(x) = …………

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine. On prend b = 0 dans la formule.

3) Cas particulier : la fonction constante.

Lorsque tous les nombres ont la même image par une fonction, on dira qu'elle est constante.
Le nombre d'arrivée est un nombre b indépendant du nombre de départ.

Ex : Le tarif illimité : A la salle de sport on paye un abonnement de 30€ par mois pour autant de séance qu'on veut.

Définition : Pour b un nombre fixé, une fonction définie par la formule f(x) = b est une fonction ……….

Remarque : Une fonction constante est une fonction affine avec a = 0, car dans ce cas f(x) = 0 x + b = b

4) Méthodes : Calculs d'image et d'antécédent d'un nombre par une fonction affine.

Exemple : Soit la fonction f définie par la formule $f(x) = 3x + 2$

- Pour déterminer l'image de – 8 par la fonction f : je remplace x par – 8 dans la formule qui donne $f(x)$.

$f(-8) = 3 \times$ (……..) + ……. = …………………………………….. L'image de –8 par f est – 22 on note f (………) =………..

Important : Si f est une fonction affine alors f (0) = b, « l'image de 0 donne le coefficient b »

- Pour déterminer l'antécédent de – 5 par la fonction f : je cherche les nombres x qui vérifient $f(x) = -5$.
Donc je résous l'équation $3x + 2 = -5$

II. Propriétés des fonctions affines.

1) Taux d'accroissement d'une fonction affine :

Propriété : Si f est une fonction affine f(x) = ax + b, alors les accroissements des images f(x) sont proportionnels aux accroissements des antécédents x

Autrement dit, pour tous les nombres x_1 et x_2 on a f(x2) – f(x1) = a (x2 – x1) donc $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Définition : L'expression $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est appelée le taux d'accroissement de la fonction f.

Preuve : admise (activité au cahier d'exercice)

Exemple : f(x) = 2x + 3 prenons $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$ alors f (2) = ………… f(4) = ……….

$a = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$ = ……………… on retrouve le coefficient a de la fonction affine f(x) = **2**x +3

2) Représentation graphique :

Propriété : Dans un repère, la représentation graphique

- d'une fonction ……………..est une droite qui passe par l'origine du repère. Cette droite admet pour équation cartésienne y = ax
- d'une fonction ……………… est une droite qui est parallèle à la représentation graphique de sa fonction linéaire associée. Cette droite admet pour équation cartésienne y = ax + b.
- d'une fonction …………………..est une droite qui est parallèle à l'axe des …………………
Cette droite admet pour équation cartésienne y = b.

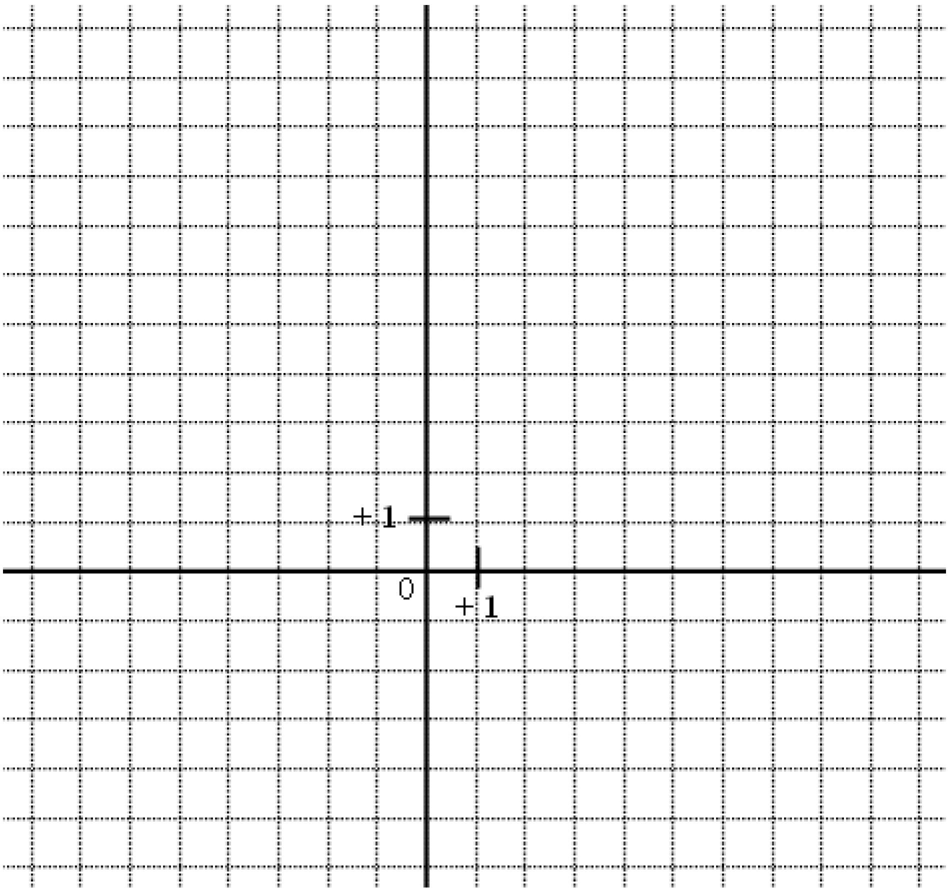
Démonstration : ADMISE

Exemples :

$f : x \longmapsto 2x + 3$
f est une fonction affine.
La droite (d_1) passe par les points B (0 ; 3) et C (–2 ; –1)
car f (0) = 3 et f (–2) = –1

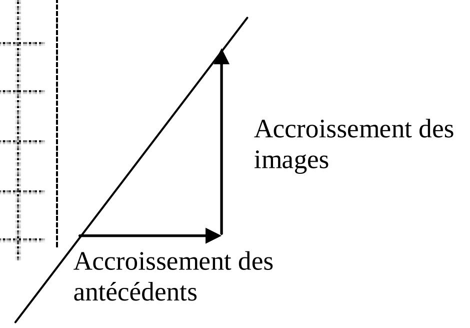
$g : x \longmapsto 2x$
g est une fonction linéaire.
La droite (d_2) passe par l'origine car f (0) = 0 et par le point A(–2 ; –4) car f (–2) = –4).

$h : x \longmapsto 3$
h est une fonction constante.
Tous les nombres ont la même image
La droite (d_3) passe par le point B (0 ; 3).



Remarques :

$a = \dfrac{\text{accroissement des images}}{\text{accroissement des antécédents}}$



Remarque : si a < 0 , la fonction est décroissante (« la droite descend »)