Les probabilités

A la fin du chapitre je dois savoir :
Par cœur le vocabulaire des probabilités (univers, évènement…)
Estimer une probabilité, calculer une probabilité à partir d'un arbre pondéré.

I. Vocabulaire, exemples :

Définition : Une **expérience** est **aléatoire** si les résultats de cette expérience **changent** lorsqu'on la répète dans **les mêmes conditions**

Ex : un lancer de pièces, dés, un tirage de boules dans une urne, une distribution de cartes, tourner une roue de loterie…

Les **issues** ou **éventualités** sont **les résultats possibles** d'une expérience aléatoire, ils sont dus au hasard. Toutes les issues d'une expérience aléatoire constituent **l'univers** de cette expérience.

Un **événement** est une condition qui peut être ou ne pas être réalisé lors d'une expérience aléatoire.
Un événement peut être réalisé par une ou plusieurs issues de l'expérience.
Un **événement** est **élémentaire** lorsqu'il est réalisé par **une seule issue** de l'expérience.

Ex 1 : Lancer d'un dé
Les issues sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 et tous ces résultats forment l'univers de l'expérience.
« Avoir le 2 » est un événement élémentaire
« Avoir un nombre pair » est une condition qui se réalise avec plusieurs issues :
« Avoir le 2 » ou « avoir le 4 » ou « avoir le 6 »
Ex 2 : Lancer d'une pièce de monnaie : univers = { P pile , F face } les 2 évènements sont élémentaires

II. Probabilités : approche fréquentiste.

1) Définition, vocabulaire:

Définition : Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, on observe que : **la fréquence (ou proportion) d'apparition d'un évènement se stabilise vers un nombre fixe.**

Ce nombre fixe est une fréquence théorique qu'on appelle la « **probabilité d'un événement**.».

Ex : Si on lance un grand nombre de fois un dé cubique, on obtient le chiffre 4 environ une fois sur 6

La probabilité d'avoir le chiffre 4 est de : **1 chance sur 6 soit $\frac{1}{6} \approx 0,1666$**

Notation : P (« obtenir 4 ») = $\frac{1}{6}$ .On lit : la probabilité de l'événement « **obtenir 4**» est égale à $\frac{1}{6}$

Remarque : L'écart entre la fréquence théorique et la fréquence observée s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.
Si on lance 600 000 fois le même dé, on n'obtiendra pas forcément exactement 100 000 fois le chiffre 4, mais par contre si on lance un grand nombre de fois la fréquence d'apparition du chiffre 4 sera proche de 1/6.

2) Equiprobabilité :

Définition : On a une **situation d'équiprobabilité** **lorsque les probabilités de chaque évènement élémentaire sont égales.**

Propriétés : * Si on a une expérience aléatoire à n issue en situation d'équiprobabilité, alors la probabilité d'un événement élémentaire est $\frac{1}{n}$.

** Une probabilité est un nombre entre 0 et 1.

Exemple 1 : On lance un dé à 10 faces et on note la probabilité d'obtenir chaque face.

face obtenue	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Probabilité	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Toutes les probabilités sont égales à $\frac{1}{10}$ donc Il y a équiprobabilité.

Exemple 2 : Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 9 boules vertes. On tire dans une urne une boule au hasard et on note sa couleur.

couleur de la boule tirée	blanche	noire	verte
probabilité	$\frac{5}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{9}{17}$

La probabilité que la boule tirée soit noire n'est pas égale à la probabilité d'obtenir une boule blanche donc il n'y a pas équiprobabilité.

Remarque : Dans le cas de l'urne, pour avoir une situation d'équiprobabilité, il aurait fallu pouvoir discerner les boules en les numérotant mais alors l'univers de l'expérience change avec plus d'évènements élémentaires.

En pratique : Si on est en situation d'équiprobabilité alors $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

3) Propriétés des probabilités :

Vocabulaire : Un événement dont la probabilité est nulle est un événement **impossible**
Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un événement **certain**

Propriétés : La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.

Dans l'exemple 2 : Dans une urne qui contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 9 boules vertes. On tire une boule au hasard. On note la couleur de la boule obtenue.

$\frac{5}{17}+\frac{3}{17}+\frac{9}{17}=\frac{17}{17}=1.$ La somme des probabilités des différentes issues est bien 1.

Définition : On connaît les issues qui constituent un événement A,
L'**événement contraire** NON A est constitué de toutes les issues possibles de l'univers qui ne vérifient pas celle de l'événement A.

Propriété : **p(non A) = 1 – p(A)**.

Exemple 3 : Dans une classe, il y a 13 filles et 15 garçons.
7 filles et 10 garçons ont un ordinateur. Les autres n'en ont pas.
On prend un élève au hasard dans cette classe.
On note les évènements suivants :
F : "l'élève est une fille" ;
G : "l'élève est un garçon" ;
O : "l'élève a un ordinateur" ;
Non O : "l'élève n'a pas d'ordinateur";

Consigne :
Complète le tableau des effectifs:
Puis les phrases avec les probabilités.

effectifs	F	G	total
O	7	10	17
Non O	6	5	11
total	13	15	28

La probabilité que l'élève pris au hasard soit une fille est $P(F) = \frac{13}{28}$

La probabilité que l'élève pris au hasard soit un garçon est $P(G) = \frac{15}{28} = \frac{28}{28} - \frac{13}{28} = 1 - \frac{13}{28}$

La probabilité que cet élève ait un ordinateur est $P(O) = \frac{17}{28}$

La probabilité que cet élève n'ait pas un d'ordinateur est $P(\text{non } O) = \frac{11}{28} = \frac{28}{28} - \frac{17}{28} = 1 - \frac{17}{28}$

La probabilité que cet élève soit un garçon qui n'a pas d'ordinateur est $P(G \text{ et non } O) = \frac{5}{28}$

Définition : Deux évènements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser à même temps.

Propriété : Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité pour que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leur probabilité.

Exemple de l'urne : Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 9 boules vertes
Soit A et B les évènements : A : « obtenir une boule noire » et B : « obtenir une boule verte ».
A et B sont incompatibles.

P(« obtenir une boule noire » ou « obtenir une boule verte ») = P(A ou B) = P(A) + P(B) = $\frac{12}{17}$

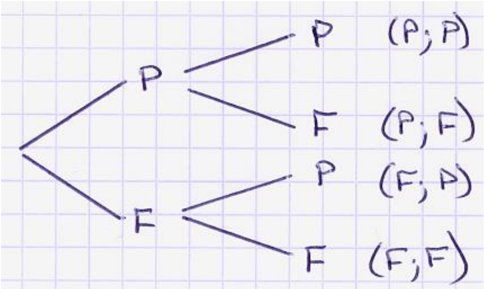
III. Expérience à 2 épreuves.

Si on répète la même expérience, on dit qu'on a une expérience à deux épreuves.
On représente l'univers des expériences à deux épreuves avec un arbre de choix qui montre les issues possibles. Ce schéma s'appelle un arbre de dénombrement ou arbre pondéré (par les probabilités).

Propriété : Sur arbre, pour calculer la probabilité de l'issue à laquelle conduit un chemin je multiplie les les probabilités rencontrées le long de ce chemin.

Remarque : à chaque nœud de l'arbre la somme des probabilités est égale à 1

Exemple 1:
On lance une pièce deux fois de suite.
On dresse l'arbre suivant des résultats obtenus :
Chaque tirage est équiprobable.

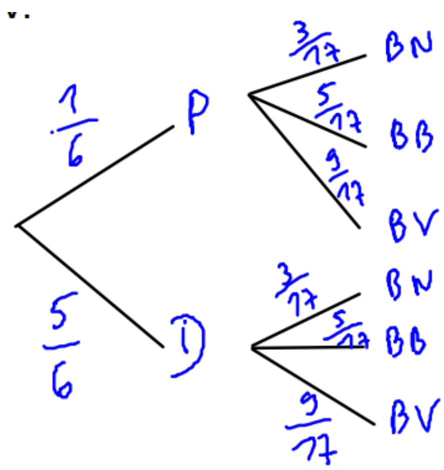


P(obtenir FF) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Exemple 2 :
On lance une punaise, puis on tire une balle dans l'urne avec 5 boules blanches, 3 boules noires et 9 boules vertes. La probabilité que la punaise tombe sur la pointe est $\frac{1}{6}$

La probabilité que la punaise tombe sur le dos est $\frac{5}{6}$

Calculer la probabilité d'avoir l'évènement pointe et une balle verte



P(P et BV) = $\frac{1}{6} \times \frac{9}{17}$

Exemple 3 :

On tire successivement avec remise une balle dans l’urne avec 5 boules blanches, 3 boules noires et 9 boules vertes. Quelle est la probabilité d’avoir 2 balles de la même couleur.

Vocabulaire : Tirer avec remise signifie qu’on remet la balle dans l’urne entre chaque tirage.

P(avoir 2 balle de même couleur)
=P (**avoir NN ou avoir BB ou avoir VV**)

$= \frac{3}{17} \times \frac{3}{17} + \frac{5}{17} \times \frac{5}{17} + \frac{9}{17} \times \frac{9}{17}$

$= \frac{115}{289}$